



Fizikadan laboratoriya mashg’ulotlari o’quvchilarning texnik kasbiy kompetensiyalarini shakllantirishda muhim omil bo’lib, nazariy bilimlarni amaliy faoliyat bilan bog’laydi. U o’quvchilarda o’lchov madaniyatini, eksperimental fikrlashni, muammoli vaziyatlarni hal etish qobiliyatini va kasbiy yo’nalishga qiziqishni rivojlantiradi.

Tajriba natijalari shuni ko’rsatadiki, laboratoriya mashg’ulotlari zamonaviy ta’limda texnik savodxonlikni oshirishning samarali shaklidir. Shuningdek, raqamli texnologiyalar bilan boyitilgan laboratoriya ishlari kelajakda o’quvchilarni innovatsion fikrlashga, muhandislik faoliyatiga va ilmiy izlanishga tayyorlaydi.

Foydalanilgan adabiyotlar

6. Karimov B. R. Fizika ta’limida eksperimental metodlarning o’rni va ahamiyati. – Toshkent: O’zbekiston Milliy universiteti, 2022. – B.156.
7. Niyozov A. A, Abdurahmonova S. M. STEM ta’limi va texnik kompetensiyalarni rivojlantirishda laboratoriya mashg’ulotlarining roli // Ta’lim va innovatsiya ilmiy-uslubiy jurnali. – 2021. – №4. – B. 56–62.
8. Abdurahimov J. A. Raqamli texnologiyalar yordamida fizika fanini o’qitishning samaradorligini oshirish // Ilm va jamiyat ilmiy jurnali. – 2023. – №2. – B. 33–40.
9. O’zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi. Umumta’lim fanlari bo’yicha o’quv dasturlarini modernizatsiya qilish konsepsiyasi: Qaror №475, 2020-yil 9-avgust. – Toshkent, 2020. – 12 b.
10. OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development). Future of Education and Skills 2030: OECD Learning Compass – Competence Framework. – Paris: OECD Publishing, 2021. – 85 p.

KVADRAT DIOFANT TENGLAMALARINI YECHISH USULLARI

Axmadjonova Oydinxon Soyibjon qizi,
Farg’ona davlat texnika universiteti o’ituvchisi,
oydinoyaxmadjonova94@gmail.com, 949149974

Annotatsiya. Ushbu tezisdagi diofant tenglamalari turlari, kvadrat dDiofant tenglamalarini yechish usullari o’rganilgan. Yechish usullari misollar orqali ko’rsatib berilgan.

Kalit so’zlar. Diofant tenglamalari, Pell tenglamasi, Pifagor tenglamasi, tenglamaning umumiy va xususiy, boshlang’ich yechimlari.

METHODS FOR SOLVING QUADRATIC DIOPHANTINE EQUATIONS

Akhmadjonova Oydinkhon Soyibjon kizi,
Teacher of Fergana State Technical University,
oydinoyakhmadjonova94@gmail.com , 949149974

Annotation. This thesis studies the types of Diophantine equations, methods for solving quadratic Diophantine equations. The methods of solution are shown through examples.

Keywords. Diophantine equations, Pell equation, Pythagorean equation, general and particular, initial solutions of the equation.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Ахмаджонова Ойдинхон Сойибжон кызы,
Преподаватель Ферганского государственного технического университета,
oydinoyakhmadjonova94@gmail.com , 949149974

Аннотация. В данной диссертации изучаются типы диофантовых уравнений, методы решения квадратных диофантовых уравнений. Методы решения показаны на примерах.

Ключевые слова: Диофантовы уравнения, уравнение Пелля, уравнение Пифагора, общее и частное, начальные решения уравнения.



Matematikada Diofant tenglamalari — bu noma’lumlar butun son bo’lishi kerak bo’lgan tenglamalardir. Ular qadimgi yunon matematigi Diofant nomi bilan atalgan. Bunday tenglamalarni yechishning maqsadi — barcha butun sonli yechimlarni topishdir.

Masalan:

$$3x + 5y = 11, \text{ yoki } x^2 + y^2 = z^2 \text{ kabi.}$$

Quyida biz Diofant tenglamalarini turlarini va ularning yechimlarini o’rganamiz.

1. Chiziqli Diofant tenglamalar
2. Kvadrat Diofant tenglamalari.
3. Nostandart kvadrat tenglamalar

Kvadrat Diofant tenglamalari

1) Pell tenglamasi. Diofant tenglamalari ichida ikkinchi darajali Pell tenglamasi deb nomlanuvchi $x^2 - ay^2 = 1$ ko’rinishidagi tenglamalar ko’p uchraydi, bu yerda a butun musbat sonlar bo’lib tenglama to’la kvadrat shaklida ifodalanmaydi. $x^2 - ay^2 = 1$ ko’rinishidagi tenglamalar aniqmas Ferma tenglamasi deb ham nomlanadi. $(\pm 1; 0)$ tenglamaning trivial ildizlari deyiladi. Tenglamaning qolgan ildizlari trivial emas deyiladi. Pell tenglamasining eng kichik notrivial yechimi $x \pm \sqrt{a}y$ mumkin bo’lgan eng kichik qiymatni oladi. Pell tenglamasining ildizlari cheksiz ko’p. Agar x_0, y_0 tenglamaning eng kichik notrivial ildizi bo’lsa Nyuton binomi formulasidan foydalanib $x_0 \pm \sqrt{a}y_0$ yoyiladi. Natijada quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo’ladi:

$$\begin{cases} (x_0 + \sqrt{a}y_0)^n = x_n + \sqrt{a}y_n \\ (x_0 - \sqrt{a}y_0)^n = x_n - \sqrt{a}y_n \end{cases}$$

Pell tenglamasining umumiy ildizlarini topishda zanjir kasrdan ham foydalanish mumkin.

Teorema. (x, y) - Pell tenglamasining musbat ildizi bo’lsin. U holda x/y qiymat a zanjir kasrga ifodalaydi.

Teorema. a zanjir kasr elementlari ketma-ketligi davrining uzunligi n bo’lsin. U holda a zanjir kasrning surat va maxraji Pell tenglamasining yechimi bo’ladi.

Zanjir kasr $\sqrt{a} = [a_0; a_1; a_2, \dots]$ bo’lib uning davri uzunligi S bo’lsin. S juft va toq bo’lishi

mumkin, agar S juft bo’lsa unga mos kasr quyidagi olinadi: $\frac{P_{S-1}}{Q_{S-1}} = [a_0; a_1; a_2; \dots; a_{S-1}]$. Bunda Pell

tenglamasining eng kichik natural ildizi quyidagi ko’rinishda bo’ladi: $x = P_{S-1}, y = Q_{S-1}$. Agar S toq bo’lsa, $x = P_{2S-1}, y = Q_{2S-1}$.

Boshlang’ich ildizni to’pishda $x^2 = 1 + Ay^2$ teng son olinadi, ya’ni:

$$\sqrt{A} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_{n-2}}}} = \frac{p}{q} = \frac{x_0}{y_0}.$$

8-misol. $x^2 - 15y^2 = 1$ tenglamani butun sonlarda yeching.



$$\sqrt{15} = 3 + \frac{1}{a_1} \left(a_1 = \frac{1}{\sqrt{15} - 3} = 1 + \frac{1}{a_2} \right);$$

$$\text{Yechish: } \frac{\sqrt{15} - 3}{6} = \frac{1}{a_2} \left(a_2 = \frac{6}{\sqrt{15} - 3} = 6 + \frac{1}{a_3} \right); \quad a_3 = \frac{1}{\sqrt{15} - 3} = a_1$$

$$\frac{p}{q} = 3 + \frac{1}{1} = \frac{4}{1} = \frac{x_1}{y_1}$$

$$\text{Javob: } \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n + 15y_n \\ y_{n+1} = 4y_n + x_n. \end{cases}$$

Tushuntrish (2-usul).

$x^2 - Ay^2 = 1$ tenglamani butun sonlarda yechish qoidasi: bu yerda quyidagi holatlar kuzatiladi:

a) $A=n^2$ bo'lsa, $x^2 - n^2 y^2 = 1 \quad (x - ny)(x + ny) = 1$ tenglama natural sonlar to'plamida yechimga ega emas, uning butun ildizlari mavjud $(1; 0), (-1; 0)$ qanoatlantiradi: $(x - ny)(x + ny) = 1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1)$ tenglamadan kelib chiqadi.

b) Agar $A \neq n^2$ bo'lsa, $x^2 = 1 + Ay^2$ tenglamadan tanlash orqali boshlang'ich ildizlari topiladi. Ba'zi holatlarda tanlash juda ham qiyin bo'ladi, bunda esa boshlang'ich ildiz quyidagi qoidalaridan topiladi:

$$\sqrt{A} = x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \dots \frac{1}{x_{n-2}}}} = \frac{p}{q} = \frac{x_1}{y_1}.$$

Tenglamani umumiy ildizi quyidagi teoremdan topiladi.

Teorema. $x^2 - Ay^2 = 1$ tenglamada $A \neq n^2$ bo'lsa, uning umumiy ildizlari quyidagicha topiladi:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_1 x_n + A y_1 y_n \\ y_{n+1} = x_1 y_n + y_1 x_n \end{cases}$$

Bu yerda $(x_1; y_1)$ tenglamani boshlang'ich ildizi.

9-misol. $x^2 - 3y^2 = 1$ tenglamani butun sonlarda yeching.

Yechish: $x^2 = 1 + 3y^2 \quad y = 0; \pm 1; \pm 2, \dots$, qiymatlar beriladi,

$$y_1 = 1, x_1 = 2 \quad y_2 = -1, x_2 = -2.$$

$$\text{Umumiy ildiz } \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = 2y_n + x_n \end{cases}$$

Tekshirib ko'ramiz: $n=1$ bo'lsin,

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n = 7 \\ y_{n+1} = 2y_n + x_n = 4 \end{cases}, n = 2 \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n = 26 \\ y_{n+1} = 2y_n + x_n = 15 \end{cases}$$

$$26^2 - 3 \cdot 15^2 = 1$$

$$\text{Javob: } \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = 2y_n + x_n \end{cases}$$



2) $ax^2 - by^2 = 1$ tenglamani butun sonlarda yechish qoidalari

Bunday kvadrat Diofant tenglamasini yechish uchun quyidagi teoremdan foydalanamiz.

Teorema. $ax^2 - by^2 = 1$ tenglamada $a_n \neq n^2$, $b_n \neq k^2$ bo’lsa, uning umumiy ildizlari quyidagi formuladan topiladi:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_1 u_n + b y_1 v_n \\ y_{n+1} = x_1 u_n + a y_1 v_n \end{cases}$$

Bu yerda $(x_1; y_1)$ tenglamaning boshlang’ich ildizi va u_n va v_n $u^2 - abv^2 = 1$ tenglamaning boshlang’ich ildizlari.

Izoh. Boshlang’ich ildizni topishda quyidagi qoidalar ham foydalaniladi:

$$u_1 + v_1 \sqrt{ab} = (x_1 \sqrt{a} + y_1 \sqrt{b}).$$

10-misol. $7x^2 - 6y^2 = 1$ tenglamani butun sonlarda yeching.

Yechish: $7x^2 = 1 + 6y^2$ $\begin{cases} x_{n+1} = u_n + b v_n \\ y_{n+1} = u_n + a v_n \end{cases}$ u va v lar uchun boshlang’ich ildizlarni topamiz.

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases} \text{ ma'lum } 1 - \text{usul}, u^2 - 42v^2 = 1$$

$$2 - \text{usul. } u_1 + \sqrt{42}v_1 = \sqrt{6} + \sqrt{7} / \uparrow^2$$

$$u_1^2 + 42 \cdot 2u_1v_1 + 42v_1^2 = 6 + 2\sqrt{42} + 7 = 13 + 2\sqrt{42}$$

$$\begin{cases} u_1^2 + 42v_1^2 = 13 \\ 2u_1v_1\sqrt{42} = 2\sqrt{42} \end{cases} \Rightarrow u_1v_1 = 1 \quad u_1 = \frac{1}{v_1} = ?$$

$$1 - \text{usul}, u^2 - 42v^2 = 1$$

$$\sqrt{42} = 6 + \frac{1}{x_1} \quad x_0 = 6 \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{42} - 6} = \frac{\sqrt{42} + 6}{6} = 2 + \frac{1}{x_2}$$

$$x_1 = 2 \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{42} - 6} = x_1 = 2 \quad 6 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2} = \frac{u_1}{v_1}$$

Demak, $u_1=13$ va $v_1=2$ boshlang’ich ildiz ekanligidan

$$\text{Javob: } \begin{cases} x_{n+1} = x_1 u_n + b y_1 v_n \\ y_{n+1} = x_1 u_n + a y_1 v_n \end{cases} \begin{cases} x_{n+1} = u_n + b v_n \\ y_{n+1} = u_n + a v_n \end{cases} n=1 \begin{cases} x_2 = 13 + b \cdot 2 = 13 + 6 \cdot 2 = 25 \\ y_2 = 13 + a \cdot 2 = 13 + 7 \cdot 2 = 27 \end{cases}$$

$(1;1), (25;27).$

3) $x^2 + y^2 = A$ tenglamani butun sonlarda yechish qoidalari

Agar $x^2 + y^2 = A$ tenglamani butun sonlarda yechishda 2 ta holat ko’rib chiqiladi.

Agar tenglamaning o’ng tomonidagi ozod son 4 ga karrali bo’lmasa, qoldiqlar 1,2,3, bo’adi. Har qanday sonning kvadratni 4 ga bo’lganda 0 yoki 1 qoldiq qolishi ma’lum. Agar $A=4A_1+2$ bo’lsa, u holda x va y



toq son sifatida qaraladi va $x < y$ shart ostida $x^2 + y^2 < y^2 + y^2 = A \Rightarrow 2y^2 = A \Rightarrow \frac{A}{2} < y^2 < A$ va

kvadrati A va $A \equiv 3 \pmod{4}$ bo’lsa, butun sonlar to’plamida tenglamaning yechimi mavjud emas. Agar $A \equiv 2 \pmod{4}$ bo’lsa, x va y toq son bo’ladi. Agar $A \equiv 0 \pmod{4}$ bo’lsa, u holda $x=2x_1$, $y=2y_1$ juft son sifatida qaraladi. $4x_1^2 + 4y_1^2 = 4A_1 \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = A_1$ kelib chiqadi. $A_1 = 4A_2$ bo’lsa, $(x_1 = 2x_2; y_1 = 2y_2) \Rightarrow x_2^2 + y_2^2 = A_2$ va hokazo. Tenglamaning o’ng qismidagi ozod son toq bo’lgunga qadar davom ettiramiz.

11-misol. $x^2 + y^2 = 160$ tenglamani butun sonlarda yeching.

Yechish: $160 = 4 \cdot 40$ $x = 2x_1; y = 2y_1$ demak juft son

$4x_1^2 + 4y_1^2 = 160 \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = 40$ $x_1 = 2x_2; y_1 = 2y_2$ demak juft son

$4x_2^2 + 4y_2^2 = 40 \Rightarrow x_2^2 + y_2^2 = 10$ $10 \equiv 2 \pmod{4}$ $y_2 < x_2$

$5 < x_2 < 10 \rightarrow (x_2 = 3; y_2 = 1), (x_1 = 6; y_1 = 2), (x = 12, y = 4)$

Tekshirish: $12^2 + 4^2 = 160$ **Javob:** $(12; 4)$

4) $x^2 + y^2 = z^2$ tenglamani butun sonlarda yechish (Pifagor tenglamasi)

Bu tenglama ham uch holda qaraladi:

a) $x^2 + y^2 = z^2$ tenglama yechimi butun sonlarda qidirilganda

$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2, \quad m > n, \quad m, n \in \mathbb{Z}$

b) $x^2 + y^2 = nz^2$ tenglama yechimi butun sonlarda qidirilganda

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{n}{2}}(u+v) \\ y = \sqrt{\frac{n}{2}}(u-v) \end{cases} \left[\frac{n}{2} \in \mathbb{Z} \right]$$
 almashtirish orqali Pifagor teoremasiga keltiriladi.

c) $ax^2 + y^2 = z^2$ tenglama yechimi butun sonlarda qidirilganda

$x = k; \quad y = \frac{ak^2 - 1}{2}; \quad z = \frac{ak^2 + 1}{2};$ Agar a -toq bo’lsa, k -toq son

$x = 2k; \quad y = ak^2 - 1; \quad z = ak^2 + 1;$ Agar a -juft bo’lsa.

Ushbu maqolada ixtiyoriy darajali diofant tenglamalarining butun va ratsional yechimlarini topish usullari, so’ngra ikki noma’lumli chiziqli tenglamalarni yechish usullari batafsil bayon etildi, misollar keltirildi. So’ngra tenglamalarning yechimi Avval Yevklid algoritmi bilan, so’ngra zanjirli kasr yordamida qidirildi. Har bir usul afzalligi, bajarilash jaroni ham nazariy ma’lumotlar bilan, ham misollar bilan ko’rsatib o’tildi. Diofant tenglamalarining boshqa tenglamalardan farqi tenglama ildizlari butun sonlar to’plamidan qidirishidir.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. И. Г. Башмакова, Диофант и Ферма. В сб. «Историко математические исследования», вып. 17. М., «Наука», 1966.
2. SH.N.Ismailov. Sonlar nazariyasi. – Toshkent, 2008 y.
3. М.А. Мирзаахмедов, Д. Сотиболдиев. Ўқувчиларни математик олимпиадаларга тайёрлаш. Тошкент, “Ўқитувчи” -1993 й.